

Авторы:

Степанов Алексей Георгиевич

Ильин Игорь Викторович,

Генеральный директор ООО «АгроПроектИнвест»

E-mail: ilyin@agroproj.msk.ru

Аннотация: В статье даётся анализ состояний водяного пара при разных фазовых состояниях воды, отмечаются новые свойства пара. Показывается, что давление насыщенного пара не зависит от давления окружающей среды, а зависит только от его температуры. Показывается единство этого процесса в открытой атмосфере и котлах.

Приводятся новые формулы расчёта и новое построение I-d диаграммы, позволяющие рассчитывать параметры воздуха с высокими температурами. Результаты могут использоваться в инженерных расчётах систем микроклимата, котлов и холодильной техники.

Статья имеет хорошие перспективы в инженерной и исследовательской практике.

Инженерные методы определения параметров микроклимата в животноводческих помещениях

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья расширяет основные положения доклада А.Г. Степанова, И.В. Ильина “Физико-математическая модель формирования микроклимата в животноводческих помещениях”, Сборник научных трудов, том 12, ГНУ ВНИИМЖ, г. Подольск, 2003.

Термином «Инженерные методы» - назовём метод, допускающие замену действия основных физических и других законов математической аппроксимацией их результатов. Использование инженерных методов позволяет многие инженерные задачи сделать аналитическими, избавляясь от классических методов описания изучаемых объектов или процессов, а также от большого числа таблиц и графиков, построенных по опытным данным.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Аппроксимация опытных данных состояний насыщенного пара позволила получить достаточно точную формулу насыщенного пара для всего диапазона инженерных задач.

$$P_w = k \cdot 4.579 \cdot e^{\frac{17.14 \cdot t}{235.3+t}} \quad (1)$$

где: P_w - давление насыщенного пара

t - температура насыщенного пара (воздуха), 0С.

k - переводной коэффициент размерности

Значение переводного коэффициента k	Размерность полученного давления P_w
1.0	мм.рт.ст.
133.33	Па
1/7.5	кПа
1/735.6	ат

Продемонстрируем универсальность этой формулы на опытных данных, которые для наглядности представлены в графическом виде и там же, в виде красной линии приведены результаты, рассчитанные по формуле (1).

АТМОСФЕРА

1. Источник: <http://otvet.mail.ru/question/37380750>
2. Источник: Давление атмосферы на различной высоте над землей. DPVA.info - Инженерный справочник <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/GuidePhysicsPressure/AirPressureHeight/>
3. Источник: Стандартная атмосфера. ГОСТ 4401 – 81 <http://otvet.mail.ru/question/38387691>

Аппроксимируем изменение температуры кипения по высоте формулой

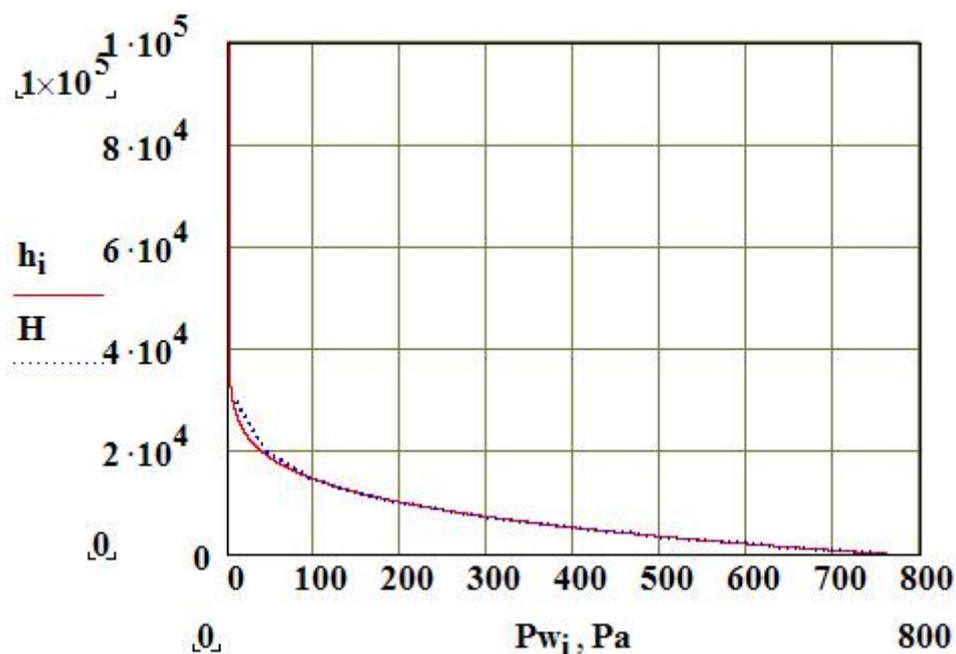
$$t_k = 100 - \frac{H}{300} \quad (2)$$

Подставив это значение температуры в формулу (1), получим формулу расчёта давления насыщенного пара (кипения) по высоте.

Сводная таблица №1 состояния атмосферы

Высота над уровнем моря Н, м	Температура кипения воды, 0С	Давление,		Температура воздуха, 0С(ГОСТ 4401-81)	Плотность, кг/м ³ (ГОСТ 4401-81)	Давление насыщенного пара по формуле (1) И (2), мм.рт.ст.
		Па (ГОСТ 4401-81)	мм рт.ст.			
0	100	101330	760	15.0	1.225	760.
50		100726	755			755.
100		100129	751			751.
500	98.3	95464	716.0	11.7	1.1673	715.
1000	96.7	89876	674.1	8.5	1.1117	673.
1500	95.0	84559	634.2	5.2	1.0581	633.
2000	93.3	79501	596.3	2.0	1.0065	595.
2500	91.7	74690	560.2	- 1.3	0.9569	559.
3000	90.0	70123	525.9	- 4.5	0.9093	525.
3500	88.3					492.
4000	86.7	61661	462.5	-11.0	0.8194	461.
4500	85.0					432.
5000	83.3	54048	405.4	-17.5	0.7365	405.
6000	80.0	47217	354.1	- 24.0	0.6601	354.
7000		41106	308.3	- 30.5	0.59	309.
8000		35652	267.4	- 37.0	0.5258	268.
9000		30801	231.1	- 43.5	0.4671	233.
10000		26500	198.8	- 49.9	0.4135	201.
12000		19399	145.5			149.
15000		12112	90.8			92.3
20000		5529	41.5			38.4
30000		1197	8.98			4.6

Сравнительный график атмосферного давления и давления насыщенного пара (кипения), рассчитанного по формуле (1).



Из таблицы и графика видно хорошее совпадение сравниваемых давлений.

ДАВЛЕНИЕ НАСЫЩЕННОГО ПАРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ ВОЗДУХА

Источник: 1. Н.И. Карякин и др. «Краткий справочник по физике», с.547, Москва.

2. М.Ф. Бромлей «Гидравлические машины и холодильные установки», Москва, 1971.

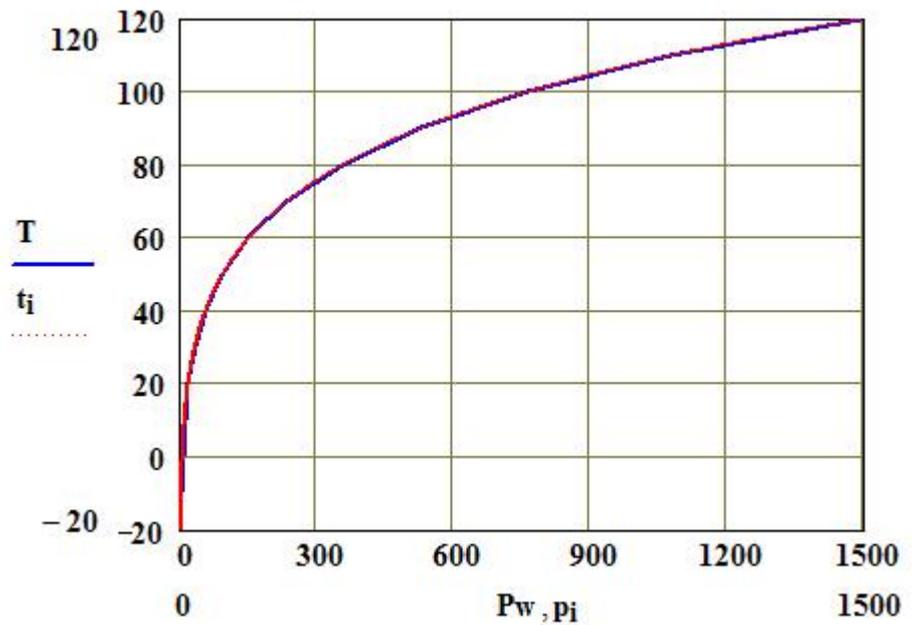
3. Давление и плотность насыщенного водяного пара при различных температурах.

Сравним опытные данные с показаниями, полученными по формуле (1)

Сводная таблица №2 давления и плотности насыщенного пара

Упругость насыщающих паров по Бромлею	По Карякину и др.	По источнику №3	Дав насыщ
---------------------------------------	-------------------	-----------------	--------------

Температура t, °C	В мм.рт.ст.	Давление Pw	Плотность	Давление Pw	Плотность ρ	пара p _н
		мм.рт.ст.	г/м ³	мм.рт.ст.	г/м ³	мм.рт.ст.
-30				0,28	0,33	
-28				0,35	0,41	
-26				0,43	0,51	
-24				0,52	0,60	
-22				0,64	0,73	
-20	0.93	0.772	0.88	0,77	0,88	
-15	1.4					
-10	2.14	1.946	2.14	1,95	2,14	
-5	3.16					
0	4.58	4.579	4.84	4,58	4,84	
5	6.53					
10	9.21	10.209	9.4	9,21	9,4	
15	12.79	12.78	12.8			
20	17.53	17.535	17.3	17,54	17,3	
25	23.76	23.756	23.0			
30	31.82	31.824	30.3	31,82	30,3	
35	42.18	42.175	39.6			
40	55.32	55.324	51.2	55,32	51,2	
45	71.88	71.88	65.6			
50	92.51	92.51	83.2	92,5	83,0	
55	118.0	118.04	104.6			
60	149.4	149.38	130.5	149,4	130	
65	187.7	187.54	161.5			
70	234.0	233.71	198.4	233,7	198	
75	289.5	289.13	242.1			
80	355.5	355.12	293.8	355,1	293	
85	434.5	433.62	354.1			
90	526.0	525.76	424.1	525,8	424	
95	635.0	633.90	505.0			
100	760.0	760.00	598.0	760,0	598	
110		1074.26	827.0			
120		1489.14	1122.0			



Выводы:

1. Давление насыщенного водяного пара не зависит от атмосферного давления;
2. Совпадение опытных и расчётных данных хорошее.

СУБЛИМАЦИЯ ЛЬДА

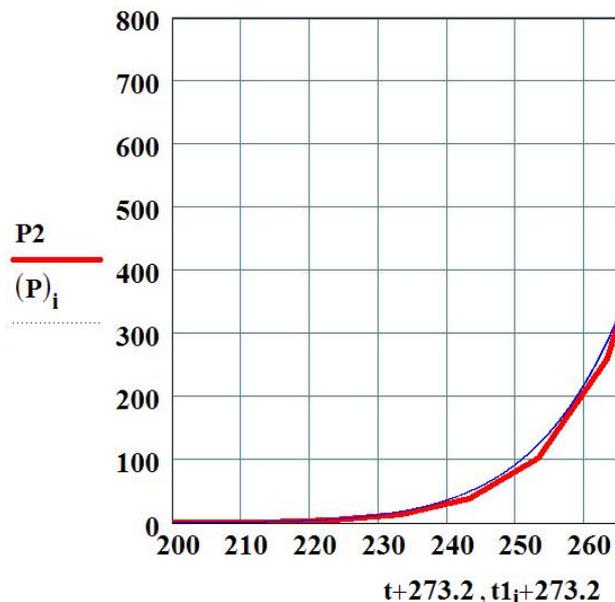
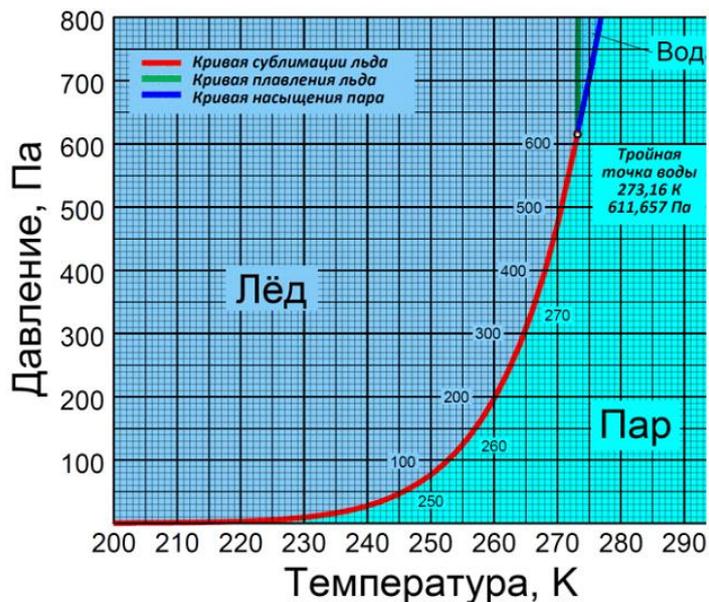
Источник: Сублимация. Материал из Википедии — свободной энциклопедии <http://ru.wikipedia.org/>

Источник представляет таблицу и график изменения давления насыщенного пара в зависимости от температуры

Таблица: Давление насыщенного водяного пара в паскалях (пар/лед) от -100 до -10°

Температура/°С	-100	-90	-80	-70	-60	-50	-40	-30	-20
Давление P2, Па	0.0014	0.0097	0.055	0.261	1.080	3.94	12.84	38.00	103.2

Сравним предлагаемый график с графиком, полученным по формуле (1)



Видно хорошее совпадение расчётных и опытных результатов.

Выводы: 1. Формула (1) может использоваться для расчёта процессов с сублимацией льда.

Давление насыщенного пара в замкнутом пространстве

Источник: 1. <http://otvet.mail.ru/question/37380750>

2. Обзор : Относительная влажность. Единица PPMv=ppmv (по объему). Единица PPMw=ppmw (по весу). Влияние давления на точку росы.

Таблицы давления насыщенного водяного пара

Таблица: Давление насыщенного водяного пара в кило Паскалях (пар/вода) от 0 до 220 °С

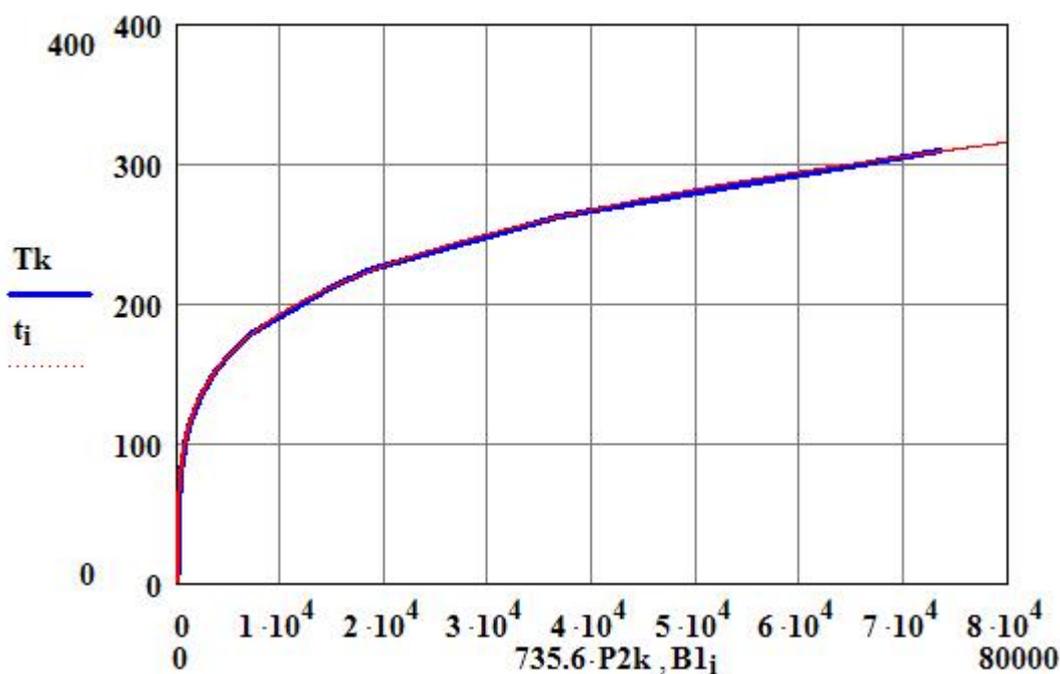
Температура /°С	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0	0.611 2	0.706 0	0.813 5	0.935 3	1.072 9	1.228 1	1.402 7	1.598 9	1.818 7	2.064 6
20	2.339 2	2.645 2	2.985 7	3.363 8	3.780 9	4.245 2	4.758 2	5.324 0	5.947 2	6.632 4
40	7.384 8	8.209 6	9.112 6	10.10 0	11.11 7	12.35 2	13.63 2	15.02 3	16.53 4	18.17 3
60	19.94 8	21.86 9	23.94 6	26.18 8	28.60 5	31.21 0	34.01 3	37.01 0	40.24 0	43.70 4

80	47.41 6	51.38 8	55.63 6	60.17 4	65.01 8	70.18 3	75.68 5	81.54 2	87.77 1	94.39 0
100	101.4 2	108.8 7	116.7 8	125.1 5	134.0 1	143.3 8	153.2 8	163.7 4	174.7 7	186.4 1
120	198.6 7	211.5 9	225.1 8	239.4 7	254.4 9	270.2 8	286.8 4	304.2 2	322.4 4	341.5 4
140	361.5 3	382.4 6	404.3 6	427.2 5	451.1 7	476.1 6	502.2 4	529.4 5	557.8 3	587.4 1
160	618.2 3	650.3 2	683.7 3	718.4 8	754.6 2	792.1 8	831.2 2	871.7 5	913.8 4	957.5 1
180	1002. 8	1049. 8	1098. 5	1148. 9	1201. 2	1255. 2	1311. 2	1369. 1	1429. 0	1490. 9
200	1554. 9	1621. 0	1689. 3	1759. 8	1832. 6	1907. 7	1985. 1	2065. 0	2147. 3	2232. 2

**Таблица: Давление насыщенного водяного пара в кило Паскалях
(пар/вода) от 220 до 360 °С**

Температура/°С	220	240	260	280	300	320	340	360
Давление /кПа	2319.6	3347.0	4692.3	6416.6	8587.9	11284	14601	18666

**Сравним предлагаемые данные с данными, рассчитанными по формуле
(1)**



Правильность сделанных вычислений подтверждает ещё один сравнительный анализ.

Источник: П.В.Болдырев. Сушка Дровесины. С-Пб., "ПрофиКС", 2006.

Сравнительная таблица максимального влагосодержания высокотемпературного воздуха

Температура воздуха, гр. С	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Сопоставление с формулой (4) в одинаковых размерностях, г/кг	3.71	7.54	14.36	33.8	45.3	75.9	122.7	192.1	293	435	631.1
	3.74	7.54	14.38	26.1	45.5	76.1	123.1	192.9	293.8	436.2	632.5

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

При анализе опытных данных и формулы (1) можно выделить ряд закономерностей:

1. Из формулы (1) следует, что парообразование воды начинается с температуры не менее -2350C и происходит при её твёрдом и жидком состоянии;
2. При кипении воды, давление насыщенного пара можно принимать равным давлению над поверхностью воды;
3. Формула (1) может использоваться при расчётах климатических показателей, а при использовании уравнения (2) - для расчёта атмосферного давления по высоте над уровнем моря;
4. Давление насыщенного пара не зависит от атмосферного давления;
5. Давление насыщенного пара зависит только от его температуры;
6. Активное парообразование (кипение воды) начинается при равенстве давлений насыщенного пара и давления окружающей среды.
7. Насыщенным водяным паром следует называть пар, находящийся в теле воды (льда), то есть – без воздуха.
В воздухе насыщенный пар становится парциальной величиной, сохраняя все характеристики насыщенного пара.

ФОРМУЛЫ РАСЧЁТА СОСТОЯНИЙ ВЛАЖНОГО ВО ЗДУХА

Нельзя пользоваться существующими «I-d» диаграммами, построенными по формуле Л.К. Рамзина

$$d_H = 623 \cdot \frac{P_H}{P_a - P_H}$$

потому, что она допускает бесконечное значение влагосодержания воздуха при приближении давления насыщенного пара к атмосферному давлению.

1. Давление насыщенного пара - по формуле (1);
2. По данным сводной таблицы 2 плотность насыщенного пара аппроксимируем формулой вида

$$\rho_H = \rho_c \cdot m \cdot P_w$$

для того, чтобы при определении максимального влагосодержания воздуха плотности сухого воздуха сократились.

$$\rho_H = \rho_c \cdot P_w \cdot (0.00015 \cdot t + 0.817)$$

(3)

3. Максимальное влагосодержание воздуха не зависит от атмосферного давления

$$d_{\max} = \frac{\rho_H}{\rho_c} = P_w \cdot (0.00015 \cdot t + 0.817)$$

(4)

4. Текущее влагосодержание воздуха

$$d = \phi \cdot d_{\max}$$

(5)

где ϕ - относительная влажность воздуха в долях единицы.

5. Температура точки росы.

Источник: 1. Диаграмма Рамзина. ID-диаграмма состояний влажного воздуха.

Таблица 1.1 Таблица точки росы влажного воздуха

t, °C	Относительная влажность, %										
	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0	-9,2	-8,2	-6,5	-5,7	-4,9	-3,7	-3,0	-2,2	-1,5	-0,6	+0
+2	-7,1	-5,7	-4,8	-3,7	-2,5	-1,9	-0,9	+0	+0,9	+1,5	+2
+4	-5,3	-4,1	-2,9	-1,9	-0,9	+0	+0,9	+1,8			+4
+6	-3,7	-2,2	-1,3	+0	+0,9	+1,8			+2,4	+3,2	+6
+8	-1,9	+0,5	+0,6	+1,8			+2,9	+3,8			+8
+10	+0				+2,7	+3,8			+4,5	+5,1	+10
+12	+2	+1,5	+2,5	+3,7			+4,5	+5,5			+12
+14	+3,7	+5,6	+7,4		+4,5	+5,8			+6,4	+7,2	+14
+16	9,2	+3,2	+4,3	+5,5			+6,8	+7,6			+16
+18					+6,8	+7,8			+8,5	+9,2	+18
+20		+4,8	+6,2	+7,4			+8,5	+9,6			+20
+22					+8,5	+9,6			+10,	+11,	+22
+24		+7	+8,3	+9,4			+10,	+11,	5	3	+24
+26		+8,9			+10,	+11,	5	4	+12,	+13,	+26
+28			+10	+11,	5	6	+12,	+13,	3	1	+28
+30		+10,	+11,	3	+12,	+13,	6	5	+14,	+15,	+30
+32		5	9	+13,	4	5	+14,	+15,	4	2	+32
+34				1	+14,	+15,	6	5	+16,	+17,	+34
+36					4	5	+16,	+17,	5	2	+36
+38							5	4	+18,	+19,	+38
+40									3	2	+40

Для значений температур воздуха, используемого на объектах сельского хозяйства максимальное влагосодержание воздуха можно

рассчитывать по упрощённой формуле $d_{max} = 0,82P_w$, тогда из равенства

$$\phi \cdot d_{max}(t) = d_{max}(t_p)$$

$$\phi \cdot 0,82 \cdot 4,58 \cdot e^{\frac{17,14 \cdot t}{235,3+t}} = 0,82 \cdot 4,58 \cdot e^{\frac{17,14 \cdot t_p}{235,3+t_p}}$$

температура точки росы определится по формуле

$$t_p = \frac{235.3 \cdot \left(\frac{17.14 \cdot t}{235.3 + t} + \ln(\phi) \right)}{17.14 - \frac{17.14 \cdot t}{235.3 + t} - \ln(\phi)}$$

(6)

Сравнение опытных результатов и результатов, полученных по формуле (6) в области температур источника, показывают их хорошее совпадение.

6. Температура «мокрого» термометра.

Источники: 1. В.Н.Богословский и др. «Отопление и вентиляция» Часть 2, Москва, 1976.

2. Психрометрическая таблица. <http://www.home-edu.ru/user/f/00000951/tables/psychr.htm>

Теплосодержание воздуха определяется формулой

$$I = 0.24 \cdot t + (597.3 + 0.43 \cdot t) \cdot \frac{d}{1000}$$

Теплосодержание воздуха с заданными параметрами и того же воздуха при температуре мокрого термометра равны, то есть

$$I = 0.24 \cdot t + (597.3 + 0.43 \cdot t) \cdot \frac{d(t)}{1000} = 0.24 \cdot t_M + (597.3 + 0.43 \cdot t_M) \cdot \frac{d_{\max}(t_M)}{1000}$$

(7)

Существуют много способов решения этого уравнения. Изложим один из них в программе **Mathcad**.

$$i := 0..100000 \quad t_i := 0.01 \cdot i - 30$$

Начальные параметры воздуха

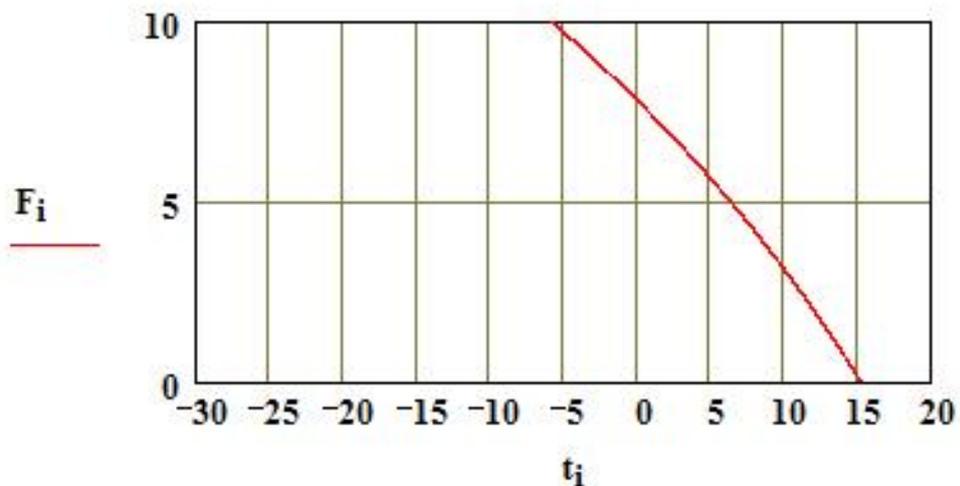
$$T := 20 \quad \phi := 0.6$$

$$II := \frac{240 \cdot T + (597.3 + 0.43 \cdot T) \cdot \phi \cdot \left[4.58 \cdot e^{\frac{17.14 \cdot T}{235.3 + T}} \cdot (0.00015 \cdot T + 0.817) \right]}{1000}$$

$$I_i := \frac{240 \cdot t_i + (597.3 + 0.43 \cdot t_i) \cdot \left[4.58 \cdot e^{\frac{17.14 \cdot t_i}{235.3 + t_i}} \cdot (0.00015 \cdot t_i + 0.817) \right]}{1000}$$

$$F_i := II - I_i$$

Решение находится графически на пересечении кривой с нулевым значением ординаты - температурой мокрого термометра.



Преобразование формулы (7), при измеренных психрометром температурах сухого и мокрого термометров, позволяет рассчитать относительную влажность и теплосодержание воздуха. Это лучше, чем искать и пользоваться большими и зачастую неверными таблицами.

Формула расчёта относительной влажности воздуха в процентах, по показаниям психрометра для сухого и мокрого термометров.

$$\phi = \frac{240 \cdot (T_M - T_C) + (597.3 + 0.43 \cdot T_M) \cdot \left[4.58 \cdot e^{\frac{17.14 \cdot T_M}{235.3 + T_M}} \cdot (0.00015 \cdot T_M + 0.817) \right]}{(597.3 + 0.43 \cdot T_C) \cdot \left[4.58 \cdot e^{\frac{17.14 \cdot T_C}{235.3 + T_C}} \cdot (0.00015 \cdot T_C + 0.817) \right]} \cdot 100$$

Сравнивая опытные результаты с результатами, полученными по формуле (7), видим их хорошее совпадение.

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

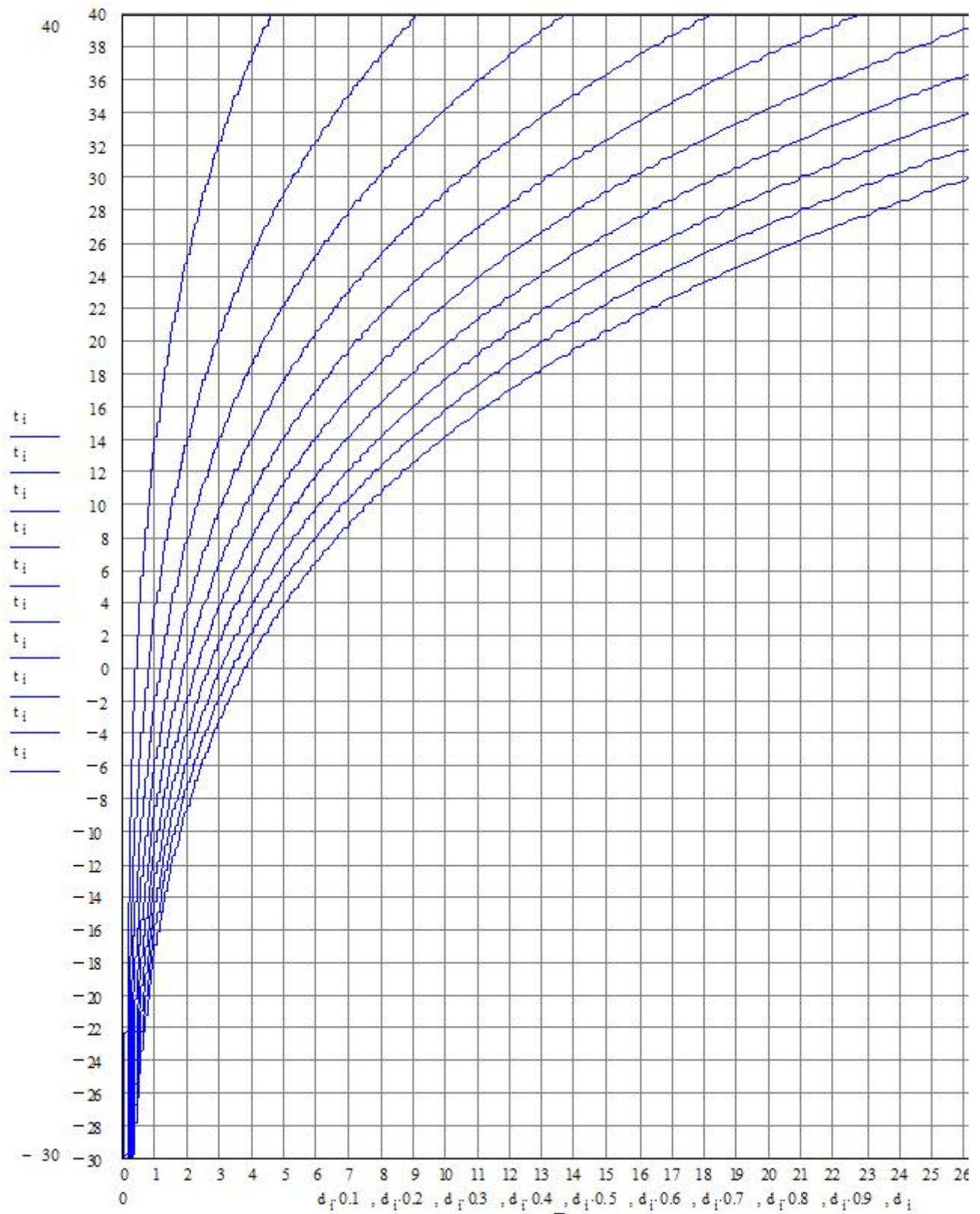
При использовании графоаналитического метода необходимо построить новую $I - d$ диаграмму.

Диаграмма строится по формулам (1),(4).(5) и (7).

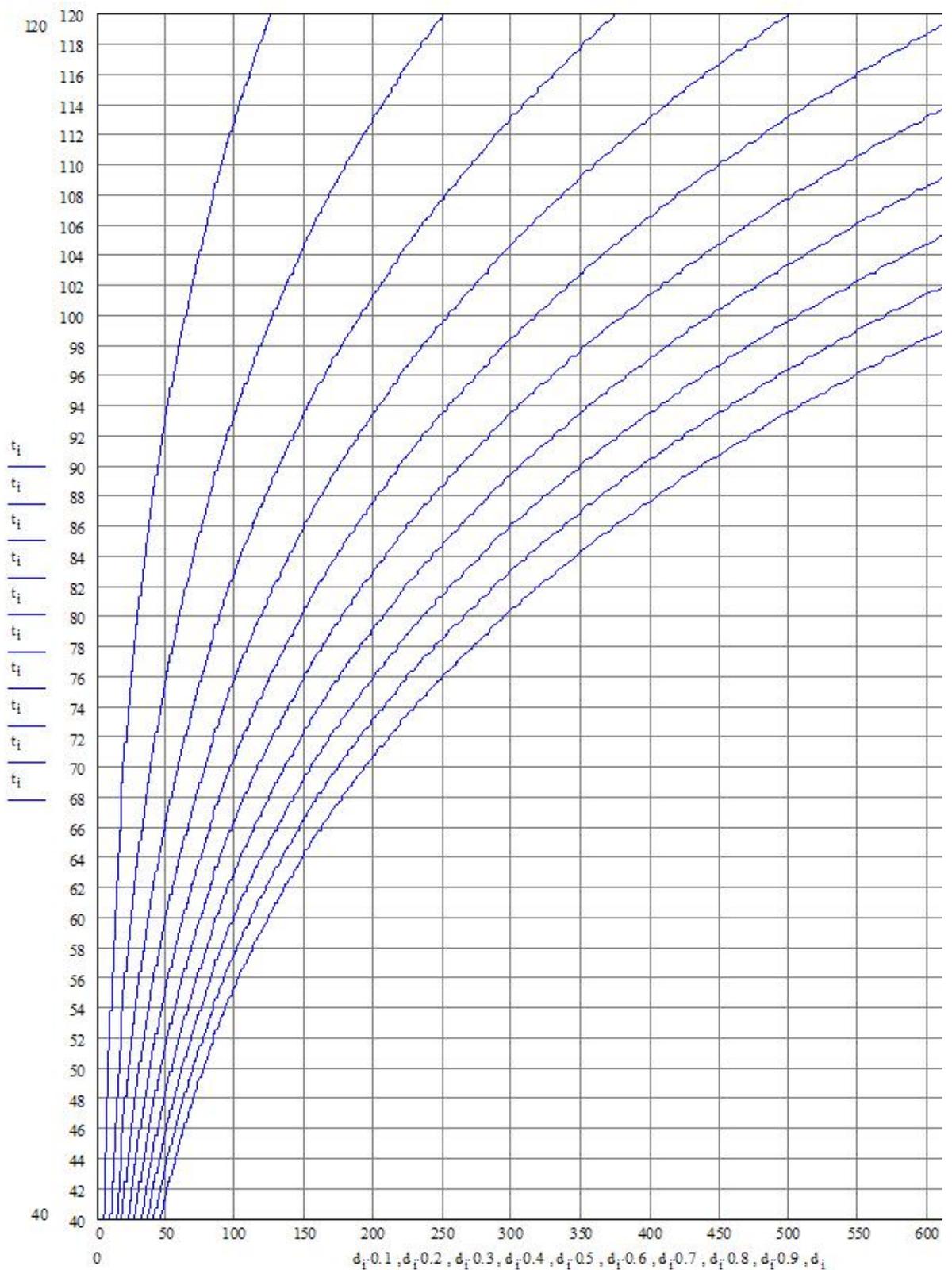
Приведём пример построения диаграммы для температур до 120 0С и для наглядности разобьём её на две части: низкотемпературную (почти совпадающую с общепринятой диаграммой) и

высокотемпературную, достоверных примеров которой в литературе нет.

Предлагаемый вариант I - d диаграммы для области низких температур



**Предлагаемый вариант I - d диаграммы
для области высоких температур**



Прямая линия постоянного теплосодержания воздуха любой размерности строится по параметрам исходной точки и точкой температуры мокрого термометра t_m на кривой максимального влагосодержания.

КОММЕНТАРИИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СРАВНЕНИЙ:

по Ларикову (приложение 7, стр.549) и Бромлею

1 Н/м² = 1 Па, 1 мм.рт.ст. = 133,322 Па,

Килограмм-сила на квадратный метр = миллиметр водяного столба

т.е. кГ/м² = мм.вод.ст. = 9.80665 Па. = 0.0682 мм.рт.ст.

1 мм.рт.ст. = 14.672 мм.вод.ст. = 133.322 Па.

1 техн.атм. = 9.81 * 10000 Па = 735.6 мм.рт.ст.

1 физ.атм. = 10.13 * 10000 Па = 760 мм.рт.ст.

По Справочнику проектировщика – отопление, водопровод, канализация, Стройиздат, 1975 г. Стр 431. Таблица соотношений...

- килограмм-сила на квадратный сантиметр

1 кгс/см² = 9.80665 * 10000 Па = 735.561 мм.рт.ст. = 1 техн.атм.**Таблица перевода единиц измерения из системы МКГСС в систему СИ (Приложение XII. Стр.257.)**

Величина	Единица измерения	Перевод в единицы СИ
Сила	Килограмм – сила, кГ	9,80665 н
Удельный вес	Килограмм – сила на кубический метр кГ/м ³	9,80665 н/м ³
Давление	- Килограмм – сила на квадратный метр, кГ/м ² - Бар - Техническая атмосфера, ат - Миллиметр ртутного столба, мм.рт.ст. - Миллиметр водяного столба, мм.вод.ст.	9,80665 н/м ² 105 н/м ² 9,80665*104 н/м ² 133,322 н/м ² 9,80665 н/м ²

ПРИЛОЖЕНИЕ.**Тема: Аппроксимация, интерполяция и ряды**

Э Т Ю Д №1

О решении кубических уравнений

Для кубического уравнения, приведенного к виду

$$y^3 + 3 \cdot p \cdot y + 2 \cdot q = 0$$

предлагается четыре способа его решения [1].

Известно также утверждение о неприводимости кубического уравнения, если оно имеет три различных действительных корня.

Кроме того, с помощью специальных методов доказывалось, что в этом случае корни уравнения вообще никаким способом не могут быть выражены через коэффициенты при помощи радикалов с действительными подкоренными выражениями [2].

Рассмотрим ещё два способа решения этого уравнения.

Пятый способ

Кубическое уравнение имеет решение в виде формулы Кардано

$$Y_1 := \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

или

$$Y_1 := \sqrt[3]{-q} \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{p^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{p^3}{q^2}}} \right)$$

Воспользовавшись разложением в биномиальный ряд

функции $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ при $x = \sqrt{1 + \frac{p^3}{q^2}}$, получаем

$$\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{d_5}{b_3}}} = 1 - \frac{3}{1} \cdot \left(1 + \frac{d_5}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \left(1 + \frac{d_5}{b_3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{d_5}{b_3}\right)^{\frac{5}{2}} - \dots$$

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{p^3}{q^2}}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} \cdot \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^{\frac{5}{2}} - \dots$$

откуда

$$Y_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-q} \cdot \left[1 - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!} \cdot \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right) - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!} \cdot \left(1 + \frac{p^3}{q^2}\right)^2 - \dots \right]$$

Сумма двух рядов сходится при $\left| 1 + \frac{p^3}{q^2} \right| \leq 1$

Таким образом, для случая $p < 0$ в

$$0 > \frac{p^3}{q^2} \geq -2$$

области уравнение перестает быть неприводимым.

Литература:

1. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев «Справочник по математике», М.1955
2. А.Г. Курош «Курс высшей алгебры», М, 1971 г.

Э Т Ю Д №2

Замечание к выводу формулы А. Эйнштейна

$E=m \cdot c^2$, изложенному Р. Неванлинной

Р. Неванлинна [1] пишет, что из формулы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1)$$

следует

$$m = m_0 \cdot \left(1 + \frac{u^2}{2 \cdot c^2} \right) \quad (2)$$

так как формула (1) может быть выражена с помощью ряда

$$m = m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{u^4}{c^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{u^6}{c^6} + \dots \right) \quad (3)$$

где при небольших скоростях тела, в сравнении со скоростью света, члены ряда, начиная с третьего, можно отбросить как исчезающе малые величины.

Переписав формулу (2) в виде

$$m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + \frac{m_0 \cdot u^2}{2} \quad (4)$$

)

автор отмечает – «Здесь второй член в правой части дает классическое значение кинетической энергии тела. Поэтому естественно понимать все выражение (4) как ПОЛНУЮ энергию E тела M».

$$E = m \cdot c^2$$

Такое же утверждение приводится в других источниках [2].

Изложенный вывод, очевидно, основывается на принятом утверждении в теории рядов, что если разложение функции в какой-либо степенной ряд возможно, то оно является разложением в ряд Тейлора [3].

Вместе с тем, данная функция может быть разложена в другие функциональные ряды, например

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1 - \frac{\ln\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{2} + \left(\frac{\ln\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} - \left(\frac{\ln\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots$$

(5)

где $0 \leq \frac{u^2}{c^2} < 1$

Обозначив $1 - \frac{u^2}{c^2} = y^2$, запишем другой функциональный ряд

$$\frac{1}{y} = 1 + (1 - y) + (1 - y)^2 + (1 - y)^3 + \dots + (1 - y)^n$$

(6)

где $0 \leq \frac{u^2}{c^2} < 1$

Сходимость обоих рядов быстрее, чем у ряда (3).

Далее, по примеру автора, отбросив члены высшей малости, начиная с третьего, получаем:

$$\text{А) } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\ln \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}{2} \right)$$

$$\text{Б) } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \left[1 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) \right]$$

где вторые члены ничем не напоминают значение кинетической энергии.

Таким образом, авторское понимание полной энергии,

как $E = m \cdot c^2$, нуждается в уточняющих доводах.

Литература:

1. Р. Неванлинна, «Пространство, время и относительность», Москва, 1966 г.
2. Б.М. Яворский, А.А. Детлаф «Курс физики», том III, Москва, 1967. и в других источниках.
3. Н.Н. Воробьёв, «Теория рядов», с.124, Москва, 1979 г.

ЭТЮД №3

Об одной теореме единственности в теории интерполирования

Теорема единственности для тригонометрического полинома изложена в учебном пособии [1], в разделе "Интерполирование периодических функций с помощью тригонометрических полиномов".

В книге утверждается, что тригонометрический полином

$$Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x))$$

порядка "n" однозначно определяется своими значениями в $2n + 1$ различных точках, расположенных на промежутке $(0, 2 \cdot \pi)$.

При доказательстве рассматривается система уравнений, имеющая ненулевое решение и разложение её определителя по элементам первого столбца, в результате чего находится тригонометрический полином

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cdot \dots \cdot \sin\left(\frac{x-x_{i-1}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_{i+1}}{2}\right) \cdot \dots \cdot \sin\left(\frac{x-x_{2n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_i-x_0}{2}\right) \cdot \dots \cdot \sin\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\right) \cdot \dots \cdot \sin\left(\frac{x_i-x_{2n}}{2}\right)}$$

С помощью тригонометрических преобразований полином порядка $2n$ от аргумента $x/2$ приобретает вид полинома порядка n от аргумента x .

Там же даётся пример построения тригонометрического полинома по узлам интерполяции:

$$x = \left(0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3 \cdot \pi}{2} \right)$$

$$y = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad -2)$$

(1)

где, после преобразований получено

$$V := 1 + \sin(x) - \cos(x) + 2 \cdot \cos(2 \cdot x) \Big|$$

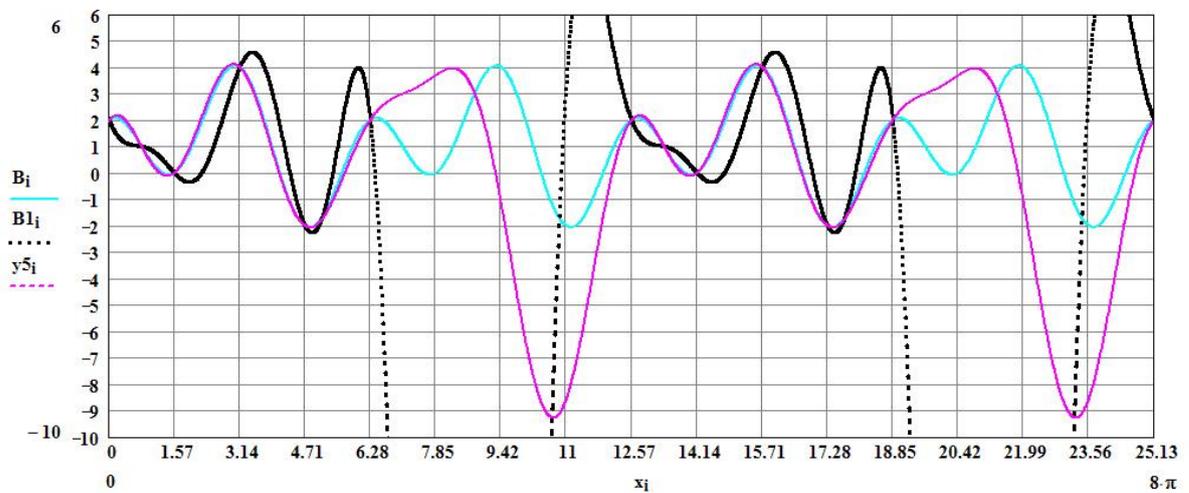
Таким образом, как частный случай, тригонометрический полином четвёртого порядка от аргумента $x/2$ в виде формулы Лагранжа с помощью тригонометрических преобразований принимает вид полинома второго порядка от аргумента x .

Покажем, что заявленная теорема единственности может претендовать только на единственность тригонометрических преобразований, но не на единственность решения. С этой целью достаточно показать один из тригонометрических полиномов четвёртого порядка от аргумента “ $x/2$ ”, который также является решением данного примера.

$$B_1 = -23.75820467 + 42.85068551 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 17.97916806 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \\ -24.426383304 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) + 25.75820467 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) - 10.66572382 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{x}{2}\right) - \\ -17.97916806 \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot x}{2}\right) + 7.54180564 \cdot \sin\left(4 \cdot \frac{x}{2}\right)$$

Что касается фантазии, то она основана на утверждении, что значения коэффициентов в формуле зависят от расположения узлов

аппроксимации. Ведь аргументом может быть, например, время. Так для узлов интерполяции (1) при различном их расположении имеем



Литература:

1. Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова, “Численные методы анализа”, Москва, 1967 г.